UAA 3 : Limites

1. Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes :

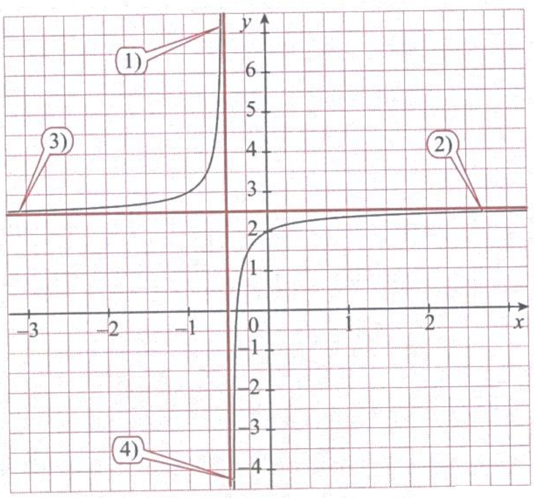
Fonction	Conditions d'existence	Domaine de définition
$f(x) = \frac{1}{x+1}$		Rép : $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$
$f(x) = x^2 - \frac{1}{x}$		$\mathbb{R}_0$
$f(x) = \sqrt{3-2x}$		$\left]-\infty; \frac{3}{2}\right]$
$f(x) = \sqrt{2x+4}$		$[-2;\ +\infty[$
$f(x) = \sqrt{x^2}$		$\mathbb{R}$
$f(x) = \frac{3x+2}{x-4}$		$\mathbb{R}\backslash\{4\}$
$f(x) = \frac{-3}{2x-5}$		$\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{5}{2}\right\}$

Fonction	Conditions d'existence	Domaine de définition
$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x-4}}$		$[4\,;\,+\infty[$
$f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{3-x}}$		$]-\infty; 3]$
$f(x) = x^3 + 6x^2 - 4x + 3$		$\mathbb{R}$
$f(x) = \dfrac{x+4}{3}$		$\mathbb{R}$
$f(x) = \sqrt{x^2+3}$		$\mathbb{R}$
$f(x) = \dfrac{\sqrt{3x+6}}{x+4}$		$[-2; 4[\ U\ ]4;\ +\infty[$
$f(x) = \dfrac{x-2}{(x-1).(x+2)}$		$\mathbb{R}\backslash\{1;\ -2\}$
$f(x) = \dfrac{\sqrt{2x-8}}{-2x-14}$		$[4;\ +\infty[$

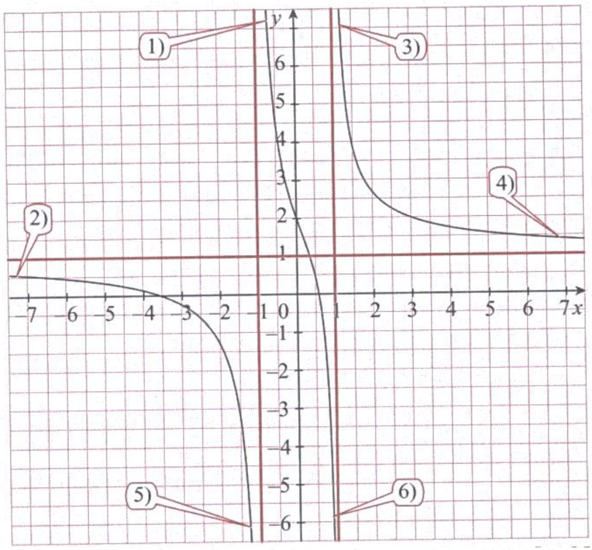
Fonction	Conditions d'existence	Domaine de définition
f(x) = $\frac{-4}{x^2-9}$		$\mathbb{R}\backslash\{3;\ -3\}$
f(x) = $\frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x-2}}$		$]2;\ +\infty[$
f(x) = $\frac{2x+7}{x^2-5x}$		$\mathbb{R}\backslash\{0;\ 5\}$
f(x) = $\frac{\sqrt{5-x}}{\sqrt{x-1}}$		]1,5]
f(x) = $\frac{3x-4}{x^2+9}$		$\mathbb{R}$
f(x) = $\frac{\sqrt{x}}{(x+1)2}$		$\mathbb{R}^+$

2. Compléter les bulles …. Traduire les situations suivantes en termes de limites. Ecrire l'équation des asymptotes par lecture graphique.

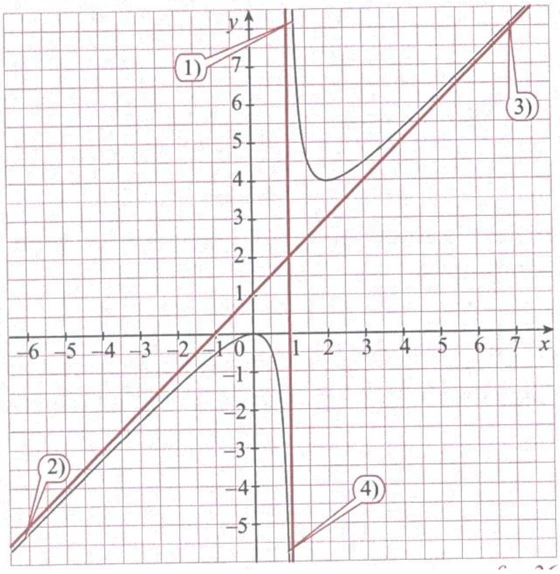
a



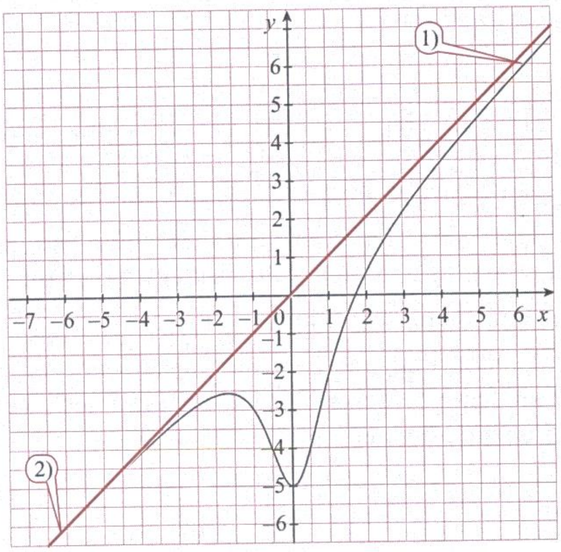
b



c



d



3. Déterminer le dom f et la (les) limites des fonctions suivantes lorsque x tend vers les points exclus du domaine :

a) $f(x)=\dfrac{2x-3}{x-2}$

b) $f(x)=\dfrac{x-5}{x-4}$

c) $f(x)=\dfrac{x+3}{1-x}$

d) $f(x)=\dfrac{x+3}{x^2-1}$

f) $f(x)=\dfrac{x+3}{x^2-4}$

g) $f(x)=\dfrac{2x-4}{2x^2-5x+2}$

h) $f(x)=\dfrac{x+4}{3x^2}$

i) $f(x)=\dfrac{2x-1}{x+1}$

k) $f(x)=\dfrac{2x}{4x^2-1}$

l) $f(x)=\dfrac{x^2+x+1}{x^2+4x+3}$

e) $f(x)=\frac{2x-5}{2-x}$

j) $f(x)=\frac{x-5}{x^2-3x+2}$

<u>Solutions</u> :

a) $Domf\ = R\backslash\{2\}; \lim \mathrm{f(x)} =\ \pm\infty$
b) $Domf\ = R\backslash\{4\}; \lim \mathrm{f(x)} =\ \mp\infty$
c) $Domf\ = R\backslash\{1\}; \lim \mathrm{f(x)} =\ \mp\infty$
d) $Domf\ = R\backslash\{\pm 1\}; \lim_1 f(x) =\ \pm\infty;\ \lim_{-1} f(x) =\ \mp\infty$
e) $Domf\ = R\backslash\{2\}; \lim \mathrm{f(x)} =\ \pm\infty$
f) $Domf\ = R\backslash\{\pm 2\}; \lim_2 f(x) =\ \pm\infty;\ \lim_{-2} f(x) =\ \mp\infty$
g) $Domf\ = R\backslash\left\{\frac{1}{2}; 2\right\}; \lim_{1/2} f(x) =\ \pm\infty;\ \lim_2 f(x) =\ 0/0$
h) $Domf\ = R\backslash\{0\}; \lim \mathrm{f(x)} =\ +\infty$
i) $Domf\ = R\backslash\{-1\}; \lim \mathrm{f(x)} =\ \mp\infty$
j) $Domf\ = R\backslash\{1; 2\}; \lim_2 f(x) =\ \pm\infty;\ \lim_1 f(x) =\ \mp\infty$
k) $Domf\ = R\backslash\left\{\pm\frac{1}{2}\right\}; \lim_{1/2} f(x) =\ \pm\infty;\ \lim_{-1/2} f(x) =\ \pm\infty$
l) $Domf\ = R\backslash\{-1;\ -3\}; \lim_{-3} f(x) =\ \mp\infty;\ \lim_{-1} f(x) =\ \pm\infty$

4. Détermine la limite des fonctions suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+2x-3}{x^2-1}=$
2. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{3x^3-4x^2-x+2}{3x^2-6x+3}=$
3. $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^3-x}{x^3+4x^2-x-4}=$
4. $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^2+4x+4}{x^3+6x^2+12x+8}=$
5. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{2x^2-x-1}{x^2+2x-3}=$
6. $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^2+4x+4}{2x^2-x-10}=$
7. $\lim\limits_{x\to 1/2}\frac{2x^2+5x-3}{4x^2-4x+1}=$
8. $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^3+4x^2-2x-5}{1-x^2}=$
9. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^2-4x+4}=$
10. $\lim\limits_{x\to 1/2}\frac{1-2x}{2x^2+5x-3}=$
11. $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^3+3x^2+5x+3}{x^2-x-2}=$
12. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2+x-6}{x^2-3x+2}=$

Solutions :

1. 2
2. 5/3
3. -1/3
4. ±∞
5. ¾
6. 0
7. ±∞
8. 7/2
9. ±∞
10. -2/7
11. -2/3
12. 5/1

5. Calcule les limites infinies

$$\lim_{x \to \pm\infty} 5x^3 + 2x^2 - 3x + 4 =$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2 + 3}{2x^2 - 1} =$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2 - 3}{x^3 - 1} =$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{2x^3 - 3x^2 + 1}{x^3 - 3x^2 + 3x - 1} =$$

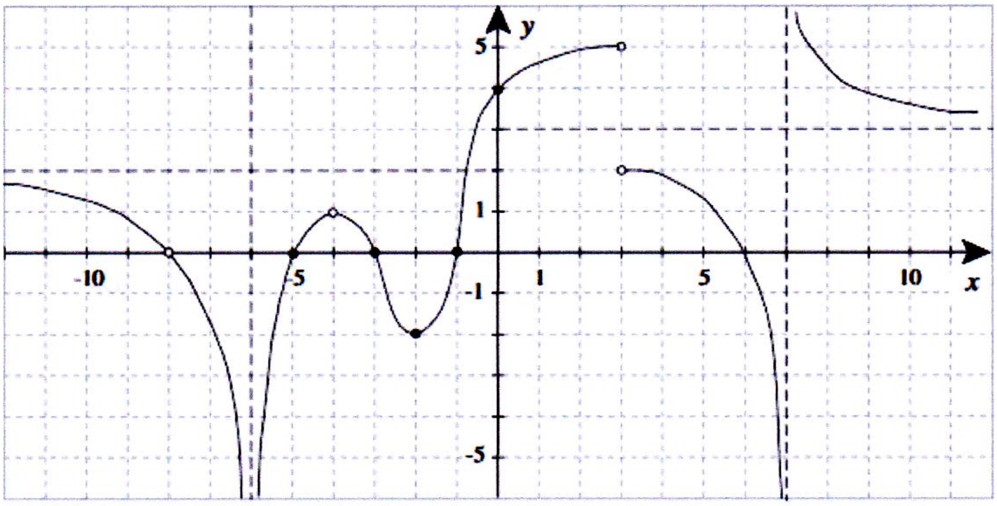
$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^3 + x^2 - 7x + 2}{-x^2 + x + 2} =$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{x(1 - x^3)}{(x^2 + 1)(1 - 2x^3)} =$$

Solutions : $\pm\infty$; $\frac{1}{2}$; 0 ; 2 ; $\mp\infty$; 0

Exercices de synthèse :

1. **Voici le graphe d'une fonction f**



a) Déterminez domf :................................

b) Complétez le tableau suivant

a	$\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$	$\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$	$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	Caractéristiques
$-\infty$				
-8				
-6				
-4				
-2				
0				
3				
7				
$+\infty$				

2. Calculez les limites suivantes (elles ont un sens) ou éventuellement la limite à gauche et à droite lorsque x tend vers un réel et interprétez graphiquement si possible

1) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-5}{2x^2+x-3} =$

2) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2+2x-3}{x^2-x} =$

3) $\lim\limits_{x\to +\infty} (1-2x+5x^3) =$

4) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 3x}{x} =$

5) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{1+2x+x^2}{x^3-1} =$

6) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x-1}{x^2-4x+4} =$

7) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x(2-x)}{(x+3)(x-3)} =$

8) $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}} \dfrac{2x^2+3x-2}{1-4x^2} =$

9) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^3-1}{4-x^2} =$

10) $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{2}} \dfrac{2x^2-13x-7}{4x^2+4x+1} =$

3. Calculez les 4 limites suivantes puis associez ces résultats aux 4 graphiques de fonctions ci-dessous.

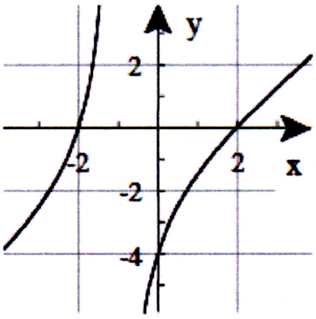
1) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x+2}{x-3} =$

3) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2-4}{x+1} =$

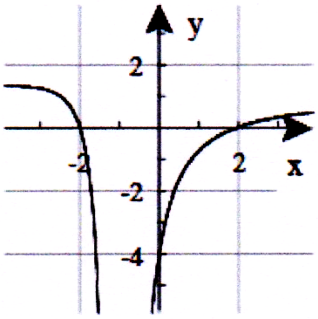
2) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2+4x+3}{x^2-1} =$

4) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2-4}{(x+1)^2} =$

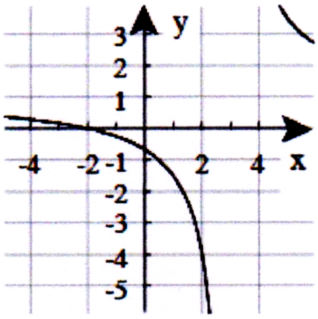
❶



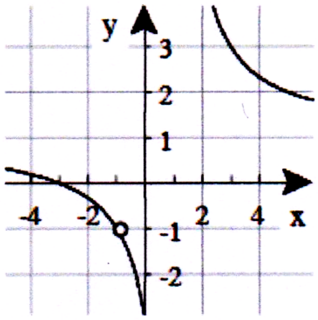
❷



❸



❹



4. Après avoir calculé les 3 limites suivantes, associez les résultats aux 3 graphiques de fonctions ci-dessous.

1) pour f définie par $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x+1}$

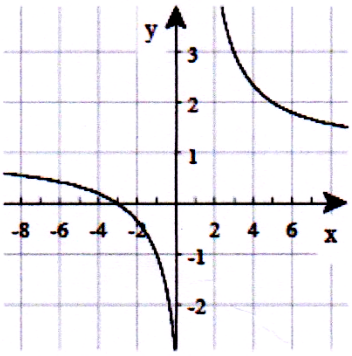
$\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^2-4}{x+1} =$

2) pour g définie par $g(x) = \dfrac{x^2+4x+3}{x^2-1}$

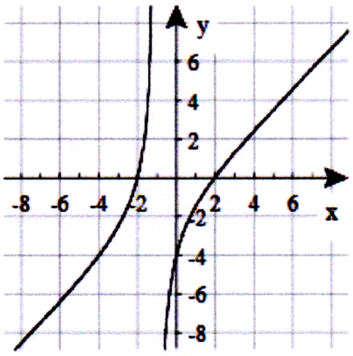
$\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^2+4x+3}{x^2-1} =$

3) pour h définie par $h(x) = \dfrac{x-4}{x^2}$

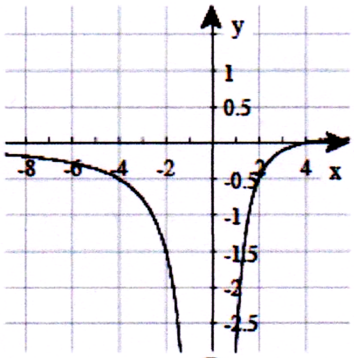
$\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x-4}{x^2} =$



❶



❷



❸